

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\mathbf{a)} \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & b(a-2) + b(c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$(A - 2I)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ b(a-2) + b(c-2) = 0 \\ (c-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 2 \end{matrix}}$$

b) Tendo en conta o apartado anterior, a matriz de coeficientes do sistema homoxéneo sería

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e polo tanto teríamos:

$\text{rang}(A) = 2 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado, solución única. Como a trivial sempre é solución dun sistema homoxéneo, concluimos que a solución é

$$\boxed{x = y = 0}$$

c) Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ademais, $\det(A) = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^{-1})^2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Como o plano π e a recta r deben se perpendiculares, o vector director da recta, \vec{v}_r , ten a dirección do vector normal ao plano. Así:

Vector normal ao plano π : $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-2, -1, 1)$

Podemos entón utilizar a ecuación dun plano a partir dun punto e dun vector normal:

$$-2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$$

e polo tanto:

$$\pi: 2x + y - z - 3 = 0$$

Para calcular o punto de intersección de r con π , substituímos as ecuacións paramétricas da recta na ecuación do plano:

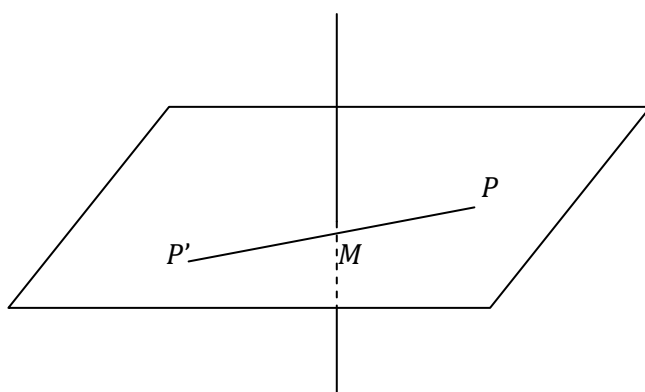
$$2(3 - 2\lambda) + 1 - \lambda - (4 + \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Substituíndo este valor nas ecuacións paramétricas da recta, obtemos o punto de corte

$$M(3, 1, 4)$$

b) Dado que $P \in \pi$, r é perpendicular a π e M é o punto de intersección de r e π , a distancia pedida:

$$d(P, r) = d(P, M) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{5}$$



c) Para obter as coordenadas do punto $P'(x, y, z)$, simétrico de P , basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P' . Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \frac{x + 2}{2} \\ 1 &= \frac{y + 1}{2} \\ 4 &= \frac{z + 2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(4, 1, 6)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ é unha función racional.

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R} - \{1\}$

Simetrías:

$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$. Polo tanto *non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.*

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto o único punto de corte cos eixes é a orixe $\boxed{O(0,0)}$.

Asíntotas verticais: Hai unha en $\boxed{x = 1}$

Posición da curva respecto da asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota oblicua:

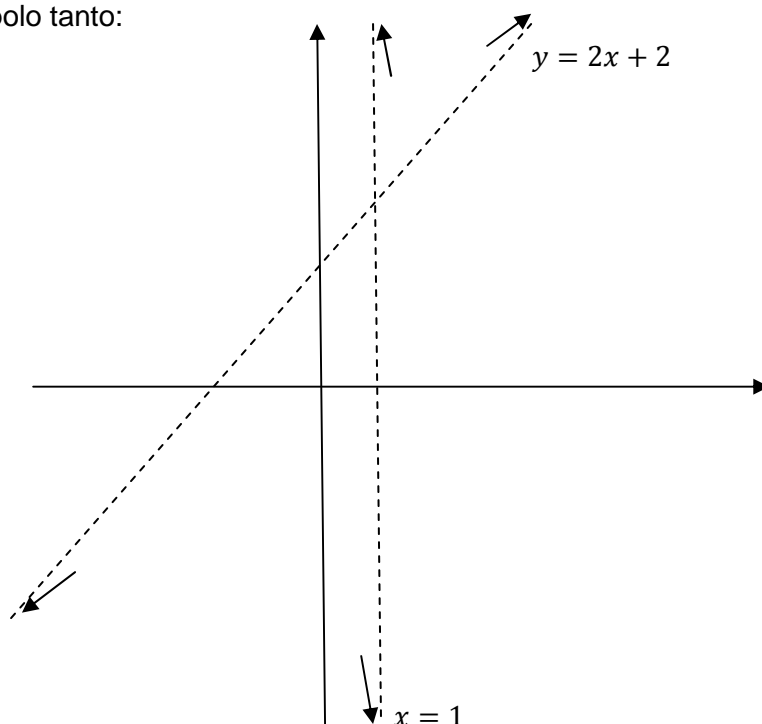
Como *grao do numerador* = 2 = *grao do denominador* + 1, hai asíntota oblicua.

$$\frac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Polo tanto $\boxed{y = 2x + 2}$ é a asíntota oblicua. Ademais:

O signo da diferenza, $\frac{2}{x-1}$, é positivo cando $x \rightarrow +\infty$ e negativo cando $x \rightarrow -\infty$

Temos polo tanto:







Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$				

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e en $(2, \infty)$ e decrecente en $(0, 1)$ e en $(1, 2)$
Máximo relativo en $(0, 0)$ e mínimo relativo en $(2, 8)$.


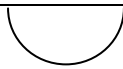
Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(4x - 4)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(2x^2 - 4x)}{(x - 1)^4} = \frac{4(x - 1)^2 - 4x^2 + 8x}{(x - 1)^3} = \frac{4}{(x - 1)^3} \neq 0$$

Non ten puntos de inflexión

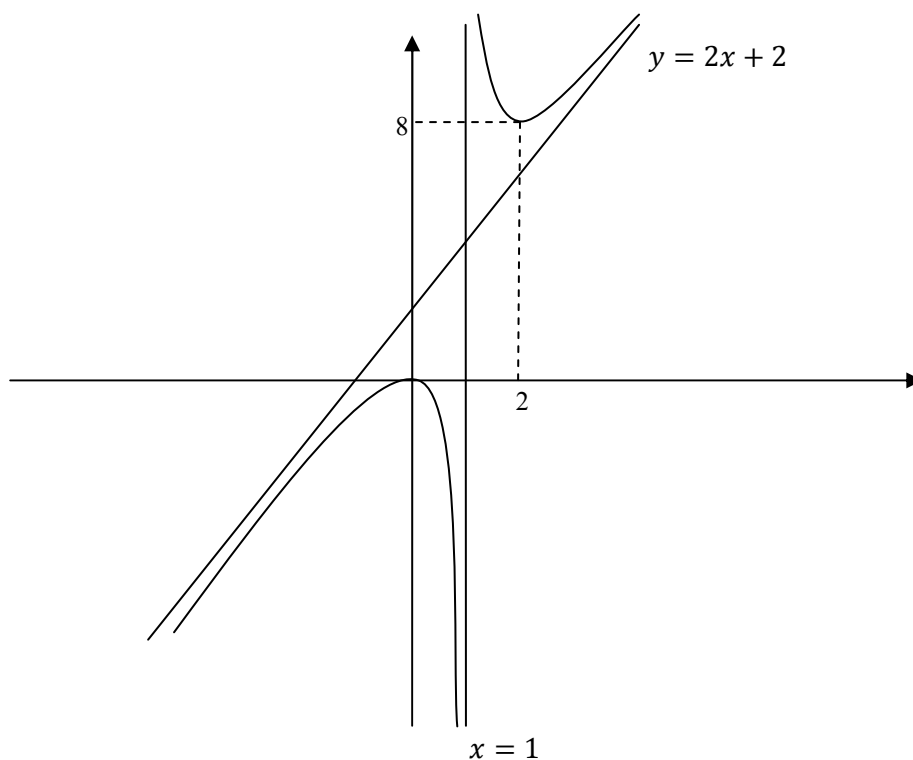
$$f''(0) < 0 \Rightarrow \text{máximo relativo en } (0, 0)$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{mínimo relativo en } (2, 8)$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

*Cóncava en $(-\infty, 1)$
Convexa en $(1, \infty)$*

Gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

a) Dise que $F(x)$ é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

b) $f(x) = ax^3 + bx + c$

$y = 2x + 1$ recta tanxente á gráfica de $f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalmente: 0

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + x^2 + x \right]_0^1 = \frac{a}{4} + 1 + 1$$

Polo tanto:

$$\frac{a}{4} + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & m & 3 \end{pmatrix}$

columnas iguais

Como a cuarta columna da matriz ampliada coincide coa segunda columna, podemos prescindir da cuarta columna para o cálculo do rango de A e polo tanto $\text{rang}(C) = \text{rang}(A)$.

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 6; \quad m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

Discusión:

$m = -3$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m = 2$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \notin \{-3, 2\}$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $m = 2$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 3 + 3z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Punto de r : $P_r(3, -1, 4)$

vector dirección de r : $\vec{v}_r = (1, 0, 2)$

Punto de s : $P_s(4, 3, 5)$

vector dirección de s : $\vec{v}_s = (3, -1, 4)$

Non son proporcionais. As rectas córtanse ou crúzanse

Se os vectores $\vec{v}_r = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_s = (3, -1, 4)$, que marcan as direccións das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (1, 4, 1)$ son independentes daquela non están no mesmo plano e as rectas polo tanto cruzaranse. Isto saberémolo vendo se o determinante da matriz formada coas coordenadas deses tres vectores é cero ou non:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 2 - 16 = 9 \neq 0$$

Polo tanto:

As rectas crúzanse

O plano pedido, π , queda determinado polo punto $(0, 0, 0)$ do plano e os dous vectores \vec{v}_r e \vec{v}_s paralelos ao plano e independentes entre si:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 2y - z = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) Punto xenérico de } r: R(3 + \lambda, -1, 4 + 2\lambda) \\ \text{Punto xenérico de } s: S(4 + 3\mu, 3 - \mu, 5 + 4\mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda)$$

Agora impoñemos a condición de que \overrightarrow{RS} sexa perpendicular a r e a s :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \perp r \Rightarrow (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda) \cdot (1, 0, 2) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \Rightarrow (1 + 3\mu - \lambda, 4 - \mu, 1 + 4\mu - 2\lambda) \cdot (3, -1, 4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda - 11\mu = 3 \\ 11\lambda - 26\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Substituíndo $\lambda = 5$ e $\mu = 2$, obtemos:

$$R(8, -1, 14); S(10, 1, 13); \overrightarrow{RS} = (2, 2, -1)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a r e a s son:

$$\boxed{t: \begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 14 - \lambda \end{cases}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

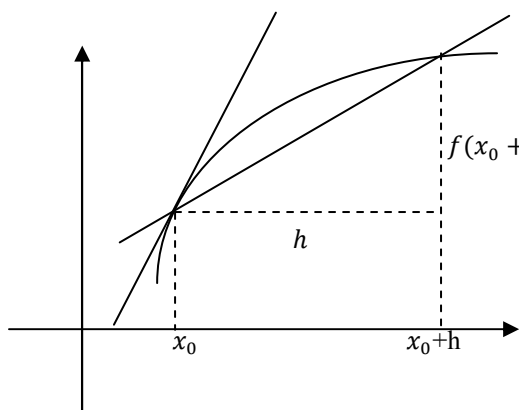
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0 + h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{Pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x), \text{ en } x = x_0.$$

b) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$, ten que ser continua en $x = 0$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 0$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e + x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + bx + c) = c \\ f(0) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Se $c = 1$, $f(x)$ será derivable en $x = 0$ se $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2x + b & \text{se } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = b \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

$f(x)$ é unha primitiva de $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$ pasando polo punto $(0,0)$

$$\int (2 - x)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(2 - x)e^{3x} + \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(2 - x)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C = e^{3x} \left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3} \right) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes:} \\ u = 2 - x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{7}{9} + C \Rightarrow C = -\frac{7}{9}$$

Polo tanto

$$f(x) = e^{3x} \left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3} \right) - \frac{7}{9}$$



Para estudar a concavidade e convexidade de $f(x)$, estudamos o signo de $f''(x)$

$$f''(x) = -e^{3x} + 3(2 - x)e^{3x} = e^{3x}(5 - 3x)$$

Como $e^{3x} > 0$, temos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5/3$$

Polo tanto

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$		

Convexa en $(-\infty, 5/3)$
Cóncava en $(5/3, \infty)$